ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по научной специальности

**1.1.2. - Дифференциальные уравнения и математическая физика**

 **Обыкновенные дифференциальные уравнения**

1. Теоремы (Пикара, Пеано) существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и их систем. ([3], §3, 20, 21; [5], гл. II, §1, [7], гл.2, §4, 5, 8.)

2. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных условий и параметра. Производная решения по параметру. ([3], §22, 24, 25, [7], гл. 2, § 7, гл.5, § 23.)

3. Теоремы о продолжении решения задачи Коши. ([3], §22, 24, 25, [7], гл. 2, §6.)

4. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения. ([5], гл. III, [7], гл. 2, §8.)

5. Линейные уравнения высокого порядка. Структура общего решения линейных однородных и неоднородных уравнений. Формула Лиувилля – Остроградского, метод вариации постоянных. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. ([3], §3, 20, 21; [5], гл.V, VI, VII, [7], гл.3, §10-12.)

6. Системы линейных уравнений. Экспонента матрицы. Матрица Коши, формула Лиувилля – Остроградского, методы интегрирования линейных систем с постоянными коэффициентами. ([4], §17, 18; [5], гл. VII, §2, [7], гл.3, §9, 14, 15.)

7. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теория Флоке. ([7], гл.3, §16.)

8. Автономные системы линейных и нелинейных уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы. Построение фазового портрета. ([3], §15, 16, [7], гл. 4, §17, 21, 22).

9. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению. ([3], §26; [5], гл.VII, §6, [7], §18-20).

10.Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи. ([7], гл. 4, §13.)

11.Линейные уравнения второго порядка. Нули решений. Теорема сравнения. Теорема Штурма. Достаточные условия колеблемости решений. ([5], гл.IV, §2; [7], гл.3, §12).

12.Задача Штурма - Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций ([6], гл. II, §3, п.9).

13.Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори ([8], §1).

14.Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. ([5], гл.VIII, [7], гл. 5, §26.) Уравнения с частными производными

15.Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теорема Коши–Ковалевской. ([2], гл. I, §1, [11], §2).

16.Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики. ([1], гл. I, §3; [2], гл. I, §2, [6], гл. I, §1,2).

17.Задача Коши для волнового уравнения и методы ее решения. Формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа. Метод спуска. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.) ([1], гл.II, §5, [2], гл. 1, §2; [6], гл. 2, §2).

18.Смешанные задачи для волнового уравнения. Метод Фурье. ([6], гл. 2, §3).

19.Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.) ([2], гл. IV, §3; [10], гл. 3, §28).

20.Задача Коши и смешанные задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.) ([10], гл. IV, §38, 39, 40; [6], гл. 3, §3).

21.Обобщенные функции. Действия с обобщенными функциями. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье. ([1], гл. II, §5-7, 9).

22.Пространства Соболева Wp m . Теоремы вложения, следы функций из Wp m на границе области. ([2], гл.3, §5 - 8).

23.Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Вариационный метод решения краевых задач. ([11], гл. 3, §3.13). Краевые задачи на собственные функции и собственные значения ([1], гл.V, §21, [2], гл. IV, §1).

**2. Оптимальное управление**

1. Теоремы отделимости, теорема Банаха об обратном операторе и следствия из них. Определение производных, основные теоремы дифференциального исчисления в функциональных пространствах. Теоремы о неявной функции и обратном отображении. Теорема Люстерника о касательном пространстве. ([13], стр. 115-182).

2. Принцип Лагранжа для гладких задач. Случай бесконечномерных экстремальных задач с равенствами и неравенствами. Простейшая задача и задача Лагранжа в классическом вариационном исчислении; уравнения Эйлера и Эйлера-Лагранжа ([13], стр. 58, 297-314). Простейшие вариационные неравенства ([17], стр. 157-160).

3. Достаточные условия для бесконечномерных задач с равенствами и неравенствами ([13], стр.287-296). Простейшая задача вариационного исчисления: необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка.

4. Связь между лагранжианом и гамильтонианом. Уравнение Гамильтона-Якоби. ([9], гл. 3, §3; [13], стр. 370-391).

5. Принцип максимума Понтрягина ([4], гл. I, §1- 4, примеры 1,2; гл. V, §29, 30).

6. Решение конкретных задач вариационного исчисления и оптимального управления и экстремальных задач анализа, геометрии, теории аппроксимации ([15], стр. 421-439; [16], стр. 89-149).

7. Основные понятия выпуклого анализа и формулы выпуклого исчисления. Теоремы о субдифференциале и об очистке. ([13], стр. 208-237; [17], стр. 21- 52). Принцип Лагранжа для выпуклых задач. Теорема Куна-Таккера ([13], стр. 52-58).

8. Теоремы двойственности в выпуклом программировании ([14], стр. 110-168; [16], стр. 60-62). Теоремы двойственности и симплекс метод в линейном программировании. Транспортная задача и задача о назначении ([16], стр. 62- 65, 80-82, 158-160; [16], стр.94-137). Динамические системы

9. Общее понятие структурной устойчивости. Критерий АндроноваПонтрягина структурной устойчивости векторных полей на сфере ([12], §10).

10. Диффеоморфизмы окружности: число вращения; диффеоморфизмы с рациональным числом вращения. Теорема о равномерном распределении для иррациональных поворотов окружности. Теорема Данжуа (без доказательства). Описание структурно устойчивых диффеоморфизмов окружности ([12], §11).

11. Структурная устойчивость Анонсовского диффеоморфизма тора. Определение диффеоморфизмов Аносова и формулировка теоремы об их структурной устойчивости ([12], §§13,14).

12. Общая задача теории бифуркаций. Лемма Сарда. Теорема трансверсальности. Семейства общего положения. Бифуркация Андронова – Хопфа ([12], §§10, 29, 33).

13. Системы, сохраняющие меру, эргодичность. Возращаемость по Пункаре. Эргодическая теорема.

**3. Механика**

1. Уравнения движения. Принцип наименьшего действия. Функция Лагранжа. Теорема Нетер и законы сохранения.

2. Одномерное движение. Движение в центральном поле.

3. Свободные и вынужденные колебания. Колебания при наличии трения.

4. Движение твердого тела. Угловая скорость, моменты инерции и количества движения. Уравнения Эйлера.

5. Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона. Теорема Лиувилля. Уравнение Гамильтона-Якоби.

**4. Теория поля**

1. Принцип относительности. Преобразования Лоренца. Интервал.

2. Релятивистская механика. Принцип наименьшего действия. Энергия и импульс.

3. Заряд в электромагнитном поле. Четырехмерный потенциал. Калибровочные преобразования. Уравнения движения заряда. Тензор электромагнитного поля.

4. Уравнения электромагнитного поля. Действие электромагнитного поля. Тензор энергии-импульса.

5. Постоянное электромагнитное поле. Закон Кулона. Электростатическая энергия заряда. Диполь. Магнитный момент. Теорема Лармора. Система зарядов в электромагнитном поле.

6. Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Плоские и монохроматические волны. Спектральное разложение.

7. Распространение электромагнитных волн. Отражение и преломление. Принцип взаимности.

8. Поле движущегося заряда. Запаздывающие потенциалы и потенциалы Льенара-Вихерта. Излучение электромагнитных волн.

9. Поле системы зарядов на далеких расстояниях.

**5. Механика и электродинамика сплошных сред**

1. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения непрерывности, уравнение Эйлера).

2. Уравнения движения вязкой жидкости. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости. Система уравнений Навье-Стокса.

3. Звук и звуковые волны.

4. Электростатика проводников.

5. Электростатика диэлектриков. Диэлектрическая проницаемость.

6. Постоянный ток. Плотность тока и проводимость.

7. Постоянное магнитное поле. Магнитное поле постоянного тока.

8. Сверхпроводники. Эффект Мейснера. Сверхпроводящий ток. Критическое поле. Куперовские пары. Уравнения Гинзбурга-Ландау.

**6. Теория твердого тела**

1. Типы и симметрии кристаллов. Свойства обратной решетки. Зона Бриллюэна. Теорема Блоха.

2. Колебания решетки. Фононы. Фактор Дебая-Уоллера. Ангармонизм и тепловое расширение.

3. Зонная структура. Квазичастицы. Электронная теплоемкость.

4. Кинетическое уравнение. Решеточное сопротивление. Увлечение фононов. Эффект Холла.

5. Поверхность Ферми. Диамагнитный и циклотронный резонанс. Открытые орбиты. Квантование орбит. Эффект де Гааза-ван Альфена.

**7. Квантовая механика**

1. Основные положения квантовой механики. Принцип неопределенности и принцип суперпозиции. Квантовомеханическое описание системы.

2. Квантование. Представление Фока. Координатное и импульсное представления.

3. Операторы энергии и импульса. Гамильтониан. Уравнение Гейзенберга. Соотношение неопределенности.

4. Уравнение Шредингера. Одномерное движение и одномерный осциллятор. Потенциальная яма. Прохождение через барьер.

5. Движение в центральном поле. Атом водорода. Разложение плоской волны.

6. Уравнение Дирака. Спин

7. Тождественность частиц и принцип неразличимости. Связь спина со статистикой. Бозоны и фермионы.

8. Атом. Состояния электронов и уровни энергии. Тонкая структура атомных уровней. Периодическая система Менделеева.

9. Квазиклассическое приближение. Модель Томаса-Ферми.

10. Движение в магнитном поле. Уравнение Шредингера в электрическом и магнитном полях. Плотность потока.

11. Квантовая теория рассеяния. Матрица рассеяния. Формула Бора. Резонансное рассеяние. Упругое рассеяние. Формула Брейта-Вигнера.

**8. Статистическая физика**

1. Основные принципы статистики. Статистическое распределение и статистическая независимость. Теория Лиувилля. Энтропия. Закон возрастания энтропии.

2. Термодинамические величины: температура, давление. Адиабатический процесс. Работа и количество теплоты, термодинамический потенциал. Принцип Ле-Шателье, теорема Нернста.

3. Распределение Гиббса. Свободная энергия. Термодинамические соотношения.

4. Термодинамика идеальных газов. Распределение Больцмана. Неравновесный идеальный газ. Свободная энергия и уравнение состояния. Закон равнораспределения. Одноатомный идеальный газ.

5. Распределения Бозе и Ферми.

6. Равновесие фаз. Формула Клапейрона-Клаузиуса. Критическая точка.

7. Флуктуации. Распределение Гиббса. Формула Пуассона.

8. Фазовые переходы второго рода.

**Основная литература по разделам 1-2**

*1.* *Владимиров B.C. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит, 1988.*

*2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1983.*

*3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1998.*

*4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1963.*

*5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Изд-во ЛКИ, 2008.*

*6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004.*

*7. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. УРСС, 2007.*

*8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - М.: Изд-во физматлит, 1985.*

*9. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.*

*10. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1971.*

*11. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Изд-во МГУ, 2005.*

*12. Арнольд В.И. Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, Наука, 1978.*

*13. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.*

*14. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.*

*15. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.*

*16. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2002.*

*17. Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В. и др. Оптимальное управление. М.: МЦНМО, 2008.*

*18. Каток А.Б., Хасселблат Б. "Введение в современную теорию динамических систем" / М.: Факториал, 1999. Дополнительная литература*

*19. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. - М.: Наука, 1978 г. Сборник задач по уравнениям математической физики. Под редакцией Владимирова B.C. М.: Физматлит, 2003.*

*20. Лакс П. Гиперболические уравнения с частными производными.-М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010.*

*21. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин А.Г. Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка. – М: МГУ, 1999.*

*22. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.*

*23. Villani C. Topics in optimal transportation. Graduate studies in mathematics. Vol. 4 58, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2003.*

*24. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.*

*25. Нестеров Ю. Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010.*

*26. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.*

*27. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение: Наука, 1970.*

*28. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.*

*29. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.*

*30. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных. Москва-Ижевск: 2003.*

*31. Курант Р. Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1964.*

*32. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Изд-во физ.мат.лит. 1977. Литература для факультативного чтения*

*33. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. -М.: Мир, 1972.*

*34. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Изд-во ЛКИ, 2008.*

*35. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: Наука, 1961.*

*36. Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения. М.: Изд. центр Академия, 2013.*

***Основная литература по разделам 3-8***

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. М., Наука, 1973-1986.*
2. *Арнольд В. Математические методы классической механики. М., Наука. 1974.*
3. *Уиттекер Э. Аналитическая динамика. М., УРСС, 1999.*
4. *Дирак П. Принципы квантовой механики. М., Наука, 1979.*
5. *Березин Ф.А., Шубин М.А. Лекции по квантовой механике. М., МГУ, 1972.*
6. *Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике. Ленинград, ЛГУ, 1980.*
7. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., Наука, 1976.*
8. *Хуанг К. Статистическая механика. М., Мир, 1966*
9. *Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М., Мир, 1971.*

***Дополнительные вопросы***

*К ПРОГРАММЕ-МИНИМУМ*

*кандидатского экзамена по специальности*

*1.1.2 - Дифференциальные уравнения и математическая физика*

1. Задачи, приводящие к понятию дифференциального включения.

2. Понятие измеримой многозначной функции. Эквивалентные определения.

3. Условия Каратеодори для многозначной функции.

4. Лемма Филиппова о существовании измеримого сечения.

5. Многозначный оператор суперпозиции и его свойства.

6. Локальная теорема существования решения дифференциального включения.

7. Глобальная теорема существования решения дифференциального включения.

8. Теорема существования решения дифференциального уравнения с разрывной правой частью.

9. Существование периодических решений дифференциальных включений. Метод интегральных операторов.

10. Существование периодических решений дифференциальных включений. Метод направляющих функций.

11. Управляемые системы и ассоциированные с ними дифференциальные включения. Существование оптимальных решений.

12. Существование решений дифференциальных включений с почти полунепрерывной снизу правой частью.

**Литература**

*Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений, М., Либроком, 2011.*